

ΤΑΞΗ: Γ' ΕΠΑΛ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, β) .

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά ακρότατο στο x_0 .

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , τότε ισχύει ότι:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Ένα τοπικό ελάχιστο μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

ε) Αν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σε έναν άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t δίνεται από την παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t)$, τότε η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t είναι $u(t) = x'(t)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, 2)$.

Μονάδες 7

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{x-3}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - kx^2 + 4x$ όπου $k \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό k .

Μονάδες 7

Γ2. Για $k = 2$, να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 7

Γ3. Για $k = 2$, να συγκρίνετε τις τιμές $f(2022)$ και $f(2023)$.

Μονάδες 5

Γ4. Για $k = 2$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{f'(x)} - \frac{2}{x+1} \right) = 0$.

Μονάδες 7

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ