

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ:** ΙΩΑΝΝΑ ΚΑΤΣΙΠΟΥΛΑΚΗ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και  $f(α) \neq f(β)$ , τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ  $f(α)$  και  $f(β)$ , υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α, β)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 8**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α, β]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 7**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση της λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**β)** Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση μιας "1-1" συνάρτησης σε ένα ακριβώς σημείο.

**γ)** Αν  $s$  είναι η συνάρτηση θέσης ενός σώματος, που κινείται πάνω σε έναν άξονα και  $a$  είναι η συνάρτηση της επιτάχυνσης του σώματος αυτού, τότε ισχύει  $a(t) = s''(t)$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$ .

**δ)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε υποχρεωτικά υπάρχουν και τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**ε)** Αν  $a > 0$ , τότε ισχύει  $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \ln(x-1)$  και η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = x+2$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε την συνάρτηση  $h = f \circ g$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 7**

**B2.** Αν  $h(x) = \ln(x+1)$ ,  $x > -1$  να δείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $h^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) = -x+1$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, e-1)$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν  $h^{-1}(x) = e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xh(x) + xh^{-1}(x) + \eta\mu 2x}{x}$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{1}{x} - e^x + \lambda$ , για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1 + e}{x - 1} = \mu \in \mathbb{R}.$$

**Γ1.** Να δείξετε ότι  $\lambda = 0$  και ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

Για  $\lambda = 0$ :

**Γ2.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f^3(x) - f(x) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να δείξετε ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $1 - xe^x = -xe^a$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(x_0, +\infty)$  όπου  $x_0$  η ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο  $A(x_1, f(x_1))$  με  $x_1 \in (1, 3)$  στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $A$  να είναι  $-7$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = |\ln x|$  και η παραγωγίσιμη

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x < 1 \\ 3 - 2\sqrt{x} - g(x), & x \geq 1 \end{cases}.$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $g$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 και στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $g$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $a = -3$ ,  $\beta = 4$ .

**Μονάδες 6**

Για  $a = -3$  και  $\beta = 4$ :

**Δ3.** Να δείξετε ότι η  $C_f$  έχει μοναδική εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 1, την οποία και να βρείτε.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $f'(x) \cdot f(x) \geq f'(x)$ , για κάθε  $x \geq 1$ .

**Μονάδες 6**

**Σας ευχόμαστε επιτυχία!!!**