ΣΑΒΒΑΤΟ 19 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ: ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

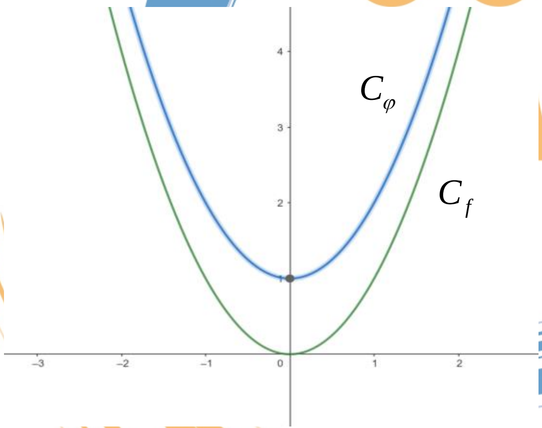
Α. i) Σχολικό βιβλίο σελίδα 36.
ii) Σχολικό βιβλίο σελίδα 33.

Β. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Α. $\varphi(x) = f(x) + 1 = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Β.



Γ. Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Η φ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 0$, ίσο με $\varphi(0) = 1$.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Α. α) Στον τριγωνομετρικό κύκλο το $\sigma\upsilon\nu\omega$ είναι ίσο με την τετμημένη του σημείου Β, οπότε από το σχήμα έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{16}{25}$.

Η γωνία ω είναι στο 2ο τεταρτημόριο, οπότε $\eta\mu\omega > 0$. Επομένως $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

Β. α) $(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)^2=$

$=\eta\mu^2\omega+2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega-2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=$

$=2\eta\mu^2\omega+2\sigma\upsilon\nu^2\omega=2(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega)=2\cdot 1=2$

β) $$\frac{\eta\mu\omega}{1-\sigma\varphi\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\varepsilon\varphi\omega}=\frac{\eta\mu\omega}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}=\frac{\eta\mu\omega}{\dfrac{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}=$$

$$=\frac{\eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}=$$

$$=\frac{(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)}{\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega}=\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega$$

γ) $$\sqrt{2\varepsilon\varphi\omega+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\sqrt{2\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\sqrt{2\frac{\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\sqrt{\frac{2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega+1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\sqrt{\frac{2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=$$

$$\sqrt{\frac{(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\sqrt{\left(\frac{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2}=\sqrt{(\varepsilon\varphi\omega+1)^2}=$$

$=|\varepsilon\varphi\omega+1|=\varepsilon\varphi\omega+1$, γιατί $0<\omega<\dfrac{\pi}{2}$ οπότε $\varepsilon\varphi\omega>0$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Α. Είναι $f(1)=3\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=3\Leftrightarrow\alpha+\beta=2$ (1)

Η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(-1,-3)$ οπότε

$f(-1)=-3\Leftrightarrow -1-\alpha+\beta=-3\Leftrightarrow-\alpha+\beta=-2$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2): $2\beta=0\Leftrightarrow\beta=0$.

Από την (1) έχουμε: $\alpha+0=2\Leftrightarrow\alpha=2$.

Β. Είναι $f(x)=x^3+2x$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathrm{A}=\mathbb{R}$ έχουμε:

$-x\in\mathrm{A}$ και

$f(-x)=(-x)^3+2(-x)=-x^3-2x=-(x^3+2x)=-f(x)$.

Άρα η f είναι περιττή.

Γ. Έστω $x_1,x_2\in\mathrm{A}=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$ (1)

$x_1<x_2\Leftrightarrow 2x_1<2x_2$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2): $x_1^3+2x_1<x_2^3+2x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ. $x^6+2x^2\le 3\Leftrightarrow\left(x^2\right)^3+2x^2\le 3\Leftrightarrow f\left(x^2\right)\le f(1)$

και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε: $x^2\le 1\Leftrightarrow|x|\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.