

ΤΑΞΗ: Γ' ΕΠΑΛ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 6

A2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $c \in \mathbb{R}$ σταθερά. Να αποδείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

α) Ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

γ) Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A4. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$, όπου $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

β) $(x^v)' = \dots\dots\dots$, όπου v φυσικός.

γ) $\left(\frac{1}{x} \right)' = \dots\dots\dots$, όπου $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 3$.

B1. Να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{x-3}$.

Μονάδες 6

B3. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - ax^2 + 5x - 8$ όπου $a \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$, είναι ίσος με -3 , τότε να δείξετε ότι $a = 5$.

Μονάδες 7

Γ2. Για $a = 5$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f' ως προς x , όταν $x = 2$.

Μονάδες 5

Γ3. Για $a = 5$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο της $M(2, f'(2))$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $a = 5$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{f'(x) - f'(0)} = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(x+1)^2}{a}$$

όπου $a \in \mathbb{R}^*$ σταθερά.

Δ1. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, τότε να δείξετε ότι $a = 4$.

Μονάδες 7

Δ2. Για $a = 4$, να βρείτε τις $f'(x)$ και $g'(x)$.

Μονάδες 6

Δ3. Για $a = 4$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στα σημεία τους με τετμημένη $x = 1$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 5

Δ4. Για $a = 4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7