ΣΑΒΒΑΤΟ 12 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΕΠΑΛ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΧΑΡΗΣ ΠΑΛΑΝΤΖΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

Α3. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ

Α4. α) $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

β) $\nu x^{\nu-1}$

γ) $-\dfrac{1}{x^2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^2-9$.

Β2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

Β3. $f(0)=\dfrac{0^3}{3}-9\cdot 0+3=3$ και $f'(0)=0^2-9=-9$.

Β4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-3=-9x\Leftrightarrow y=-9x+3.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-2ax+5$. Ισχύει ότι:

$$f'(2)=-3\Leftrightarrow 3\cdot 2^2-2a\cdot 2+5=-3\Leftrightarrow 12-4a+5=-3\Leftrightarrow -4a=-20\Leftrightarrow a=5.$$

Γ2. Για $a=5$ έχουμε $f(x)=x^3-5x^2+5x-8$ και $f'(x)=3x^2-10x+5$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=6x-10$. Άρα είναι:

$f''(2)=6\cdot 2-10=12-10=2$.

Γ3. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $M\left(2, f'(2)\right)$ έχει εξίσωση:

$$y-f'(2)=f''(2)(x-2)\Leftrightarrow y-(-3)=2(x-2)\Leftrightarrow y+3=2x-4\Leftrightarrow y=2x-7.$$

Γ4. Έχουμε $f(0)=0^3-5\cdot 0^2+5\cdot 0-8=-8$ και $f'(0)=3\cdot 0^2-10\cdot 0+5=5$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{f'(x)-f'(0)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+5x-8-(-8)}{3x^2-10x+5-5}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+5x}{3x^2-10x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2-5x+5\right)}{x(3x-10)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x+5}{3x-10}=\frac{5}{-10}=-\frac{1}{2}.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2}{a}=\frac{(1+1)^2}{a}=\frac{4}{a}.$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}g(x)\Leftrightarrow 1=\frac{4}{a}\Leftrightarrow a=4$.

Δ2. Για $a=4$ έχουμε $f(x)=2\sqrt{x}-1$ και $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{4}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\dfrac{x+1}{2}$.

Δ3. $f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$ και $g'(1)=\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Άρα οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία τους με τετμημένη $x=1$ είναι παράλληλες.

Δ4. Έστω $M\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ το σημείο της γραφικής παράστασης της g στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x’x.

Τότε $g'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0+1}{2}=0 \Leftrightarrow x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=-1$.

Έχουμε $g\left(-1\right)=\dfrac{\left(-1+1\right)^2}{4}=\dfrac{0^2}{4}=0$ και $g'\left(-1\right)=0$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-g\left(-1\right)=g'\left(-1\right)\left(x-\left(-1\right)\right) \Leftrightarrow y-0=0\left(x+1\right) \Leftrightarrow y=0$.