ΑΡΕΙΤΟΛΜΟ
ΚΕΝΤΡΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΚΥΡΙΑΚΗ 10 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

[Μονάδες 7]

Α2. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

[Μονάδες 4]

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».
α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ).
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

[Μονάδες 4]

Α4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).
α) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
β) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ell nx}$
γ) Κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ παίρνει μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha,\beta]$.
δ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
ε) Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\left(\ell n|x|\right)'=\dfrac{1}{|x|}$.

[Μονάδες 10]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{-x}{x+1}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

Β1. Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

[Μονάδες 6]

Β2. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

[Μονάδες 7]

Β3. Δείξτε ότι $\left(f \circ f\right)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

[Μονάδες 5]

Β4. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{f(x)} \right) = 0$.

[Μονάδες 7]

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2 + \alpha\sigma\upsilon\nu x - \beta, & x \geq 0 \end{cases}$.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

[Μονάδες 8]

Για $\alpha = \beta = 2$:

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

[Μονάδες 6]

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2$.

[Μονάδες 5]

Γ4. Σημείο $\mathrm{M}(x, y)$, $x \geq 0$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f πλησιάζοντας την αρχή των αξόνων. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ δίνεται από τον τύπο $x'(t) = -x(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, την χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $\left(\pi, f(\pi)\right)$.

[Μονάδες 6]

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- η ευθεία (ε): $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\left(0, f(0)\right)$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

[Μονάδες 5]

Δ2. Να δείξετε ότι το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f.

[Μονάδες 7]

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{x}$.

[Μονάδες 7]

Αν επιπλέον ισχύει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και $g(x) = f(e^x - 1) + f(x)$, $x \in [0, +\infty)$, τότε να δείξετε ότι:

Δ4. $g'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ (μονάδες 3) και στη συνέχεια ότι $g(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ (μονάδες 3).

[Μονάδες 6]

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ