ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Κυριακή 10/1/2021)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 70.

Α3. α) Ψευδής (Ψ).
β) Σχολικό βιβλίο σελ. 99.

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{-1\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{-x_1}{x_1+1}=\dfrac{-x_2}{x_2+1} \Leftrightarrow -x_1(x_2+1)=-x_2(x_1+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Β2. $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{-x}{x+1}=y \Leftrightarrow y(x+1)=-x \Leftrightarrow yx+y=-x \Leftrightarrow yx+x=-y \Leftrightarrow$
$x(y+1)=-y \overset{(y\neq -1)}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{-y}{y+1}$.

Πρέπει $x \in \mathbb{R}-\{-1\} \Leftrightarrow x\neq -1 \Leftrightarrow \dfrac{-y}{y+1}\neq -1 \Leftrightarrow -y\neq -y-1 \Leftrightarrow 0\neq -1$ το οποίο αληθεύει.

Οπότε $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{-1\}$ και $f^{-1}(x)=\dfrac{-x}{x+1}$.

Επομένως $D_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{-1\}$ και $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$. Άρα οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Β3. *1ος τρόπος:*

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ έχουμε: $(f\circ f)(x) \overset{(B2.)}{=} (f\circ f^{-1})(x)=x$.

2ος τρόπος:
Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της $f\circ f$.

Β4. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x+1}=0$ και

για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f(x)=\dfrac{-x}{x+1}>0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Για κάθε x κοντά στο 0 έχουμε: $\left|f(x)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right|\leq |f(x)|\cdot 1=|f(x)|$, οπότε

$\left|f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right|\leq|f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)|\leq f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\leq|f(x)|$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-|f(x)|\right)=\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x)=3x^2$ και $f''(x)=6x$.
Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=2x-\alpha\eta\mu x$ και $f''(x)=2-\alpha\sigma\upsilon\nu x$.
Η f πρέπει να είναι συνεχής στο 0, οπότε πρέπει να ισχύει:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 0=\alpha-\beta\Leftrightarrow \alpha=\beta \quad (1)$
Η f πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε πρέπει να ισχύει:
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-0}{x}=0 \text{ και}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\alpha\sigma\upsilon\nu x-\alpha}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{x}+\alpha\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=0+\alpha\cdot 0=0.$$
Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0)=0$.
Η f πρέπει να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0, οπότε πρέπει να ισχύει:
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}.$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2-0}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-\alpha\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{x}-\alpha\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2-\alpha\cdot 1=2-\alpha.$$
Οπότε πρέπει $2-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=2$ και από την (1) έχουμε $\beta=2$.

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.
Από το Γ1. έχουμε: $f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<0\\ 2x-2\eta\mu x, & x\ge 0\end{cases}$.
Για $x<0$ προφανώς είναι $f'(x)=3x^2\neq 0$.
Για $x=0$ είναι $f'(0)=0$.
Για $x>0$ είναι $f'(x)=2x-2\eta\mu x=2(x-\eta\mu x)\neq 0$, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|x|\ge|\eta\mu x|$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.
Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 0, δηλαδή το σημείο $\left(0,f(0)\right)$ είναι το μοναδικό σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Θέτουμε $g(x)=f'(x)-2$, $x\in\mathbb{R}$.
Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως διαφορά συνεχών (η f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη)
$g(0)\cdot g(\pi)=-2\cdot(2\pi-2)<0$

Επομένως από θ. Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=2$.

Γ4. Είναι $y(t)=x^2(t)+2\sigma\upsilon\nu x(t)-2$, οπότε $y'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-2\eta\mu x(t)\cdot x'(t)$.
Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ βρίσκεται στη θέση $\left(\pi, f(\pi)\right)$ έχουμε:
$x(t_0)=\pi$ και $x'(t_0)=-x(t_0)=-\pi$.
Επομένως $y'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)-2\eta\mu x(t_0)\cdot x'(t_0)=2\pi\cdot(-\pi)-2\eta\mu\pi\cdot(-\pi)=-2\pi^2$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Το σημείο $\left(0, f(0)\right)$ είναι κοινό της C_f και της (ε). Για $x=0$ είναι $y=0$ οπότε και $f(0)=0$. Επίσης $f'(0)=\lambda_\varepsilon=1$.

Δ2. Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες, τις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.
Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως παραγωγίσιμη και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) από υπόθεση.
Επίσης $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.
Οπότε από το θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2). ΑΤΟΠΟ αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως η f έχει το πολύ μία ρίζα και αφού $f(0)=0$, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f.

Δ3. *1^{ος} τρόπος:*
Θέτουμε $h(x)=e^{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $h(0)=e^{f(0)}=1$.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $h'(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$. Οπότε $h'(0)=e^{f(0)}\cdot f'(0)=1$.
Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)=1$.
2^{ος} τρόπος:
Το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f, οπότε για x κοντά στο 0 είναι $f(x)\neq 0$.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1\cdot 1=1$, γιατί:
Θέτουμε $f(x)=u$. Όταν $x\to 0$, τότε $u\to\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, οπότε
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$, γιατί για την συνάρτηση $\varphi(u)=e^u$ έχουμε $\varphi'(u)=e^u$ οπότε $\varphi'(0)=1$ και $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=\varphi'(0)$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{(f(0)=0)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $g'(x)=e^x\cdot f'(e^x-1)+f'(x)$.
$x\geq 0\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow}e^x\geq e^0\Leftrightarrow e^x\geq 1$ (1)

$x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(e^x - 1) \geq f'(0) \Leftrightarrow f'(e^x - 1) \geq 1$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2): $e^x \cdot f'(e^x - 1) \geq 1$ (3)

$x \geq 0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq f'(0) \Leftrightarrow f'(x) \geq 1$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3) και (4): $e^x \cdot f'(e^x - 1) + f'(x) \geq 2 \Leftrightarrow g'(x) \geq 2$.

Για την απόδειξη της ανισότητας $g(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$:

1ος τρόπος:

Για $x = 0$ είναι $g(0) = f(0) + f(0) = 0$, οπότε ισχύει η ισότητα.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) < x_0$.

Η g είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από το Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (0, x_0)$ τέτοιο, ώστε

$g'(\xi) = \dfrac{g(x_0) - g(0)}{x_0} = \dfrac{g(x_0)}{x_0} < 1$ ΑΤΟΠΟ αφού $g'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Άρα $g(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

2ος τρόπος:

Για $x = 0$ είναι $g(0) = f(0) + f(0) = 0$, οπότε ισχύει η ισότητα.

Για $x > 0$ έχουμε:

Η g είναι συνεχής στο $[0, x]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από το Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε

$g'(\xi) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$.

Είναι $g'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ οπότε $g'(\xi) \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{x} \geq 2 \overset{(x>0)}{\Leftrightarrow} g(x) \geq 2x > x$.

Άρα $g(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.