ΚΥΡΙΑΚΗ 14 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2021

<u>ΤΑΞΗ:</u> Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

<u>ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:</u> ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

<u>ΘΕΜΑ Α:</u>

Α1. α) Να αποδείξετε ότι:
«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.»

[Μονάδες 7]

β) Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

[Μονάδες 4]

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

[Μονάδες 4]

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις και ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει: $f \circ g = g \circ f$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύει ότι: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο α και ολικό μέγιστο στο β.

[Μονάδες 10]

<u>ΘΕΜΑ Β:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+1) = e^{x+1} + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

[Μονάδες 5]

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

[Μονάδες 7]

Β3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια ότι $f^{-1}(e) = 1$.

[Μονάδες 6]

Β4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2021$.

[Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ Γ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3-x+\alpha^2\,,\ x<1 \\ 2\alpha\sqrt{x}\ ,\ x\geq 1 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

[Μονάδες 7]

Για $\alpha=2$:

Γ2. Να δείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1,\ x<1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x\geq 1 \end{cases}$.

[Μονάδες 3]

Γ3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f'(x)}{f'(x)-1}$ και **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f'(x)}+\sqrt{3}\cdot x\right)$.

[Μονάδες 8]

Γ4. Αν $g(x)=f'(x),\ x\geq 1$ να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1}.

[Μονάδες 7]

ΘΕΜΑ Δ:

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x+\sqrt[3]{x+1}-1}{x^2+x}=\dfrac{4}{3}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0)=1$.

[Μονάδες 6]

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)+\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

[Μονάδες 7]

Δ3. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta-x}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (α,β).

[Μονάδες 6]

Δ4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

[Μονάδες 6]

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ