Άλγεβρα Β΄ Λυκείου 07/11/2021

Ενδεικτικές απαντήσεις

Θέμα 1ο

Α. i) Σχολικό βιβλίο, σελ.35 .

ii) Σχολικό βιβλίο, σελ.33 .

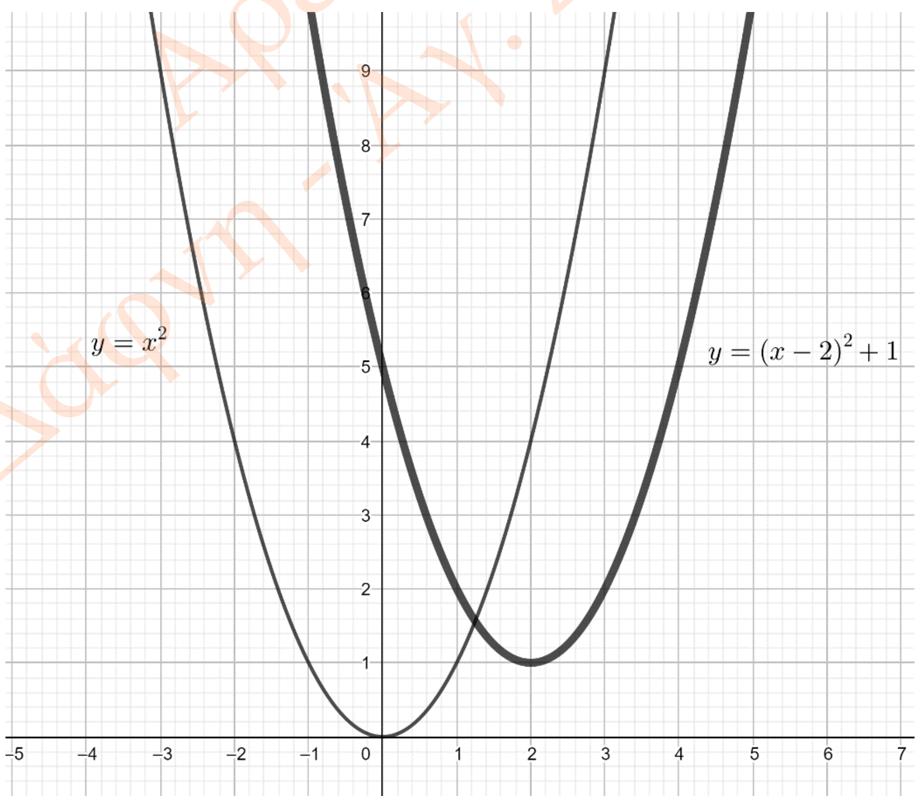
Β. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα 2ο

α) Έχουμε : $f(x) = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 + 1 \Leftrightarrow$

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

β) Για να προκύψει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f πρέπει να μετατοπίσουμε την $y = x^2$ κατά 2 μονάδες δεξιά και κατά 1 μονάδα πάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 3ο

Α. α) Έστω ότι η f είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Αν $x_1 = 4$ και $x_2 = 5$ τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow 4 < 5 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(4) < f(5) \Rightarrow 9 < 2$. ΑΤΟΠΟ.

Άρα η f δεν είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

β) $f(5-3x) < 2 \Rightarrow f(5-3x) < f(5) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} 5-3x > 5 \Rightarrow -3x > 0 \Rightarrow x < 0$

Β. α) Το κοινό σημείο Μ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών. Άρα έχουμε :

$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 4x + 2y = 12 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ και προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη έχουμε

$5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$.

Αν αντικαταστήσουμε $x = 2$ έχουμε $2 \cdot 2 + y = 6 \Leftrightarrow 4 + y = 6 \Leftrightarrow y = 2$.

Άρα έχουμε το σημείο Μ(2,2).

β) Για να διέρχεται η ευθεία ε_3 θα πρέπει οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Ελέγχω : $(\varepsilon_3): 3x + y = 8 \overset{x=2,\, y=2}{\Leftrightarrow} 3 \cdot 2 + 2 = 8$ που ισχύει.

Άρα η ε_3 διέρχεται από το σημείο Μ.

Θέμα 4ο

α) Έχουμε Α(2,0), Β(-2,0), Γ(0,-2).

Αφού η C_f διέρχεται από το Γ τότε :

$f(0) = -2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = -2 \Leftrightarrow \gamma = -2$.

Αφού η C_f διέρχεται από τα Α και Β τότε:

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-2=0 \\ \alpha\cdot(-2)^2+\beta\cdot(-2)-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+2\beta=2 \\ 4\alpha-2\beta=2 \end{cases}$$

και προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη έχουμε $8\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$.

Αν αντικαταστήσουμε $\alpha=\frac{1}{2}$ έχουμε $4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\beta=2 \Leftrightarrow 2+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=0$.

β) Έχουμε $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Άρα :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2-2 \\ g(x)=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow x^2-4=-2x+4 \Leftrightarrow$$

$x^2+2x-8=0$, όπου Δ=36 και $x_1=-4$, $x_2=2$.

Για $x_1=-4$ είναι $f(-4)=g(-4)=4+2=6$ άρα το κοινό σημείο είναι το Δ(-4,6).

Για $x_2=2$ είναι $f(2)=g(2)=-2+2=0$ άρα το κοινό σημείο είναι το Α(2,0).

Και τα 2 κοινά σημεία επαληθεύονται από το σχήμα.

γ) $h(x)=f(x)+4,5=\frac{1}{2}x^2-2+4,5=\frac{1}{2}x^2+2,5$, άρα $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$. Για να βρούμε τώρα τα κοινά σημεία της C_h και της C_g θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Άρα :

$$\begin{cases} h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2} \\ g(x)=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2} \\ y=-x+2 \end{cases} \text{ οπότε } \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}=-x+2 \Leftrightarrow x^2+5=-2x+4 \Leftrightarrow$$

$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Επομένως $h(-1)=g(-1)=1+2=3$.

Άρα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το Μ(-1,3).

δ) 1ος τρόπος:

$h\left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)-h(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow h\left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)=h(\alpha-1)$.

Αυτό ισχύει όταν $2\alpha^2-10\alpha+4=\alpha-1 \Leftrightarrow 2\alpha^2-11\alpha+5=0$, όπου Δ=81 και $\alpha_1=5$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$.

Αν παρατηρήσουμε στο σχήμα η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y. Άρα η f είναι άρτια, όπως επίσης και η h αφού είναι κατακόρυφη μετατόπισή της προς τα επάνω. Άρα αφού h άρτια τότε η εξίσωση $h\left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)=h(\alpha-1)$ ισχύει και όταν $2\alpha^2-10\alpha+4=-\alpha+1 \Leftrightarrow 2\alpha^2-9\alpha+3=0$, όπου Δ=57 και $\alpha_1=\frac{9+\sqrt{57}}{4}$, $\alpha_2=\frac{9-\sqrt{57}}{4}$.

2ος τρόπος:

$h\left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)-h(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow h\left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)=h(\alpha-1) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)^2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(\alpha-1)^2+\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(2\alpha^2-10\alpha+4\right)^2=(\alpha-1)^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2-10\alpha+4=\alpha-1$ ή $2\alpha^2-10\alpha+4=-\alpha+1\ldots$