ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
18/4/2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ϱ είναι: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varrho^2$

Α2. Για να παριστάνει κύκλο η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ πρέπει: $A^2+B^2-4\Gamma>0$. Τότε το κέντρο έχει συντεταγμένες: $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα: $\varrho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα: 83

Α4. Γ.

Α5. $\begin{array}{l}\alpha\to 3\\ \beta\to 1\end{array}$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Πρέπει $\begin{array}{l}2\lambda-1=-1\Leftrightarrow\lambda=0\\ \mu+3=4\Leftrightarrow\mu=1\end{array}$

Β2. (i) Για $\lambda=0$ και $\mu=1$ έχουμε Α(-1,4), Β(1,2), Γ(2,3)

Οπότε υπολογίζουμε τα διανύσματα: $\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1+1,2-4)=(2,-2)\\ \overrightarrow{A\Gamma}=(2+1,3-4)=(3,-1)\end{array}$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=\ldots=2$ τ.μ.

(ii) Θα υπολογίσουμε την ευθεία ΒΓ: $\lambda_{B\Gamma}=\frac{3-2}{2-1}=1,\quad y-y_0=\lambda(x-x_0)\Leftrightarrow y-2=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$

Η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με την απόσταση του κέντρου από την ευθεία ΒΓ δηλ.

$$\varrho=d(A,\varepsilon)=\frac{|1\cdot(-1)-1\cdot 4+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $(x+1)^2+(y-4)^2=8$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η παραβολή είναι της μορφής $y^2=2px$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(-8,8)$ ισχύει:

$8^2=2p(-8)\Leftrightarrow 64=-16p\Leftrightarrow p=-4$ Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι: $y^2=-8x$

Γ2. Η εστία της παραβολής έχει συντεταγμένες: $E\left(\frac{-4}{2},0\right)=(-2,0)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση: x=2.

Γ3. Υπολογίζω την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Ε:

$$\lambda_{AE}=\frac{0-8}{-2+8}=-\frac{4}{3},\quad y-y_0=\lambda\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}\left(x+2\right)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$$

Για να βρούμε το Β λύνουμε σύστημα με την εξίσωση της παραβολής.

$$\begin{cases} y^2=-8x \\ y=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=-8x \\ y=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{16}{9}x^2+\frac{64}{9}x+\frac{64}{9}=-8x \\ y=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\begin{cases}x=-8,\quad y=8 \\ x=-\frac{1}{2},\quad y=-2\end{cases}$$

Άρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες Β(-1/2,-2)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι εξισώσεις των δύο κύκλων είναι: $C_1:(x-12)^2+(y-6)^2=10$ και $C_2:(x-12)^2+(y-6)^2=16$

Δ2. Θα υπολογίσουμε τις αποστάσεις των σημείων από το κέντρο των κύκλων:

$\left(KA\right)=\sqrt{\left(10-12\right)^2+\left(7-6\right)^2}=\sqrt{5}<\sqrt{10}$ άρα στο σημείο Α η λήψη είναι «πολύ καλή»,

$\left(KB\right)=\sqrt{\left(9-12\right)^2+\left(4-6\right)^2}=\sqrt{13}$, άρα $\sqrt{10}<\sqrt{13}<4$ άρα στο σημείο Β η λήψη είναι «καλή».

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι ο δρόμος δηλ η ευθεία ε τέμνει τον εξωτερικό κύκλο.
Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου από την ευθεία:

$d\left(K,\varepsilon\right)=\frac{\left|12\cdot 1-1\cdot 6-1\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}<4$. Άρα πράγματι υπάρχει τμήμα του αυτοκινητόδρομου στο οποίο η λήψη είναι «καλή» ή «πολύ καλή».