Ενδεικτικές απαντήσεις στα Μαθηματικά Γ' Λυκείου
Κυριακή 7 Μαρτίου 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1) Σελ. 145 σχολικού βιβλίου.
Α2) Σελ. 143 σχολικού βιβλίου.
Α3) **α)** Λ **β)** Σελ. 155 σχολικού βιβλίου.
Α4) **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f'(x)=7x^6+1>0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και "1-1".
Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f.
Επίσης

- $x>1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>0$
- $x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$
- $x=1 \Rightarrow f(1)=0$

Β2) $f(x)=0 \overset{\text{B1}}{\Leftrightarrow} x=1$ και $f'(1)=8$
Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο σημείο (1,0).
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (1,0) είναι η ευθεία
$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=8\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=8x-8$

Β3) $A_h=A_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / f(x)>0\}=\{x\in\mathbb{R} / f(x)>f(1)\}$
$\overset{f\uparrow}{=}\{x\in\mathbb{R} / \ x>1\}=(1,+\infty)\neq\varnothing$
$h(x)=g(f(x))=\ell n(x^7+x-2)$, $x>1$.

Β4) Η h είναι παραγωγίσιμη για $x>1$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $h'(x)=\dfrac{(x^7+x-2)'}{x^7+x-2}=\dfrac{7x^6+1}{x^7+x-2}=\dfrac{7x^6+1}{f(x)}>0$ αφού $7x^6+1>0$ και $f(x)>0$ από το Β1.

Αφού $h'(x)>0$, τότε η h είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1" και συνεπώς αντιστρέφεται.
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h:

$$h\left((1,+\infty)\right) \underset{h\sigma\upsilon\nu}{\overset{h\uparrow}{=}} \left(\lim_{x\to 1^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = (-\infty,+\infty)$$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \ell n\left(x^7+x-2\right) \underset{u\to 0^+}{\overset{x^7+x-2=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ell n u = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ell n\left(x^7+x-2\right) \underset{u\to +\infty}{\overset{x^7+x-2=u}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} \ell n u = +\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Αφού η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^3+\beta x^2-(4\alpha+1)x}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^3+\beta x^2-(4\alpha-3)x}{x^2-4}.$$

- Αν $\alpha\neq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\alpha-1)x\right)=+\infty$ ή $-\infty$

- Αν $\alpha=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta x^2-x}{x^2-4}$, οπότε:
  - Αν $\beta\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta x^2}{x^2}=\beta\neq 0$
  - Αν $\beta=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$

Άρα $\alpha=1$ και $\beta=0$.

Γ2) Αφού $\alpha=1$ και $\beta=0$, είναι $f(x)=\dfrac{x^3-5x}{x^2-4}$, $x\neq\pm 2$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι συμμετρικό ως προς το 0, άρα για κάθε $x\in A$, $-x\in A$ και

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-5(-x)}{(-x)^2-4}=\frac{-x^3+5x}{x^2-4}=-\frac{x^3-5x}{x^2-4}=-f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή και συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Γ3) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$ ως ρητή, με

$$f'(x)=\frac{(3x^2-5)\cdot(x^2-4)-2x\cdot(x^3-5x)}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^4-12x^2-5x^2+20-2x^4+10x^2}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{x^4-7x^2+20}{\left(x^2-4\right)^2},\ x\neq\pm2.$$

Το τριώνυμο $\left(x^2\right)^2-7x^2+20$ έχει $\Delta=49-80=-31<0$, άρα $x^4-7x^2+20>0$ και $f'(x)>0,\ x\neq\pm2$ με f συνεχή για $x\neq\pm2$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2),(-2,2),(2,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

- $f\left((-\infty,-2)\right)\underset{f\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\uparrow}{=}}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

γιατί:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5x}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\left(\frac{x^3-5x}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-\infty)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)=0$ και $x+2<0$, κοντά στο -2^-

Όμοια:

- $f\left((-2,2)\right)\underset{f\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\uparrow}{=}}(-\infty,+\infty)$
- $f\left((2,+\infty)\right)\underset{f\sigma\upsilon\nu}{\overset{f\uparrow}{=}}(-\infty,+\infty)$

Άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

Γ4) Η εξίσωση γράφεται $x^3-5x=\kappa\left(x^2-4\right)$ (1)
Αν $x=2$ βρίσκουμε ότι $-2=0$ άτοπο.
Αν $x=-2$ βρίσκουμε ότι $2=0$ άτοπο.
Άρα η (1) γράφεται $\dfrac{x^3-5x}{x^2-4}=\kappa\Leftrightarrow f(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R},\ x\neq\pm2$.
Από το ερώτημα Γ3 έχουμε:

- $\kappa\in\mathbb{R}=f\left((-\infty,-2)\right)\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$ υπάρχει ένα ακριβώς $x_1\in(-\infty,-2)$ ώστε $f(x_1)=\kappa$.
- $\kappa\in\mathbb{R}=f\left((-2,2)\right)\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$ υπάρχει ένα ακριβώς $x_2\in(-2,2)$ ώστε $f(x_2)=\kappa$.
- $\kappa\in\mathbb{R}=f\left((2,+\infty)\right)\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$ υπάρχει ένα ακριβώς $x_3\in(2,+\infty)$ ώστε $f(x_3)=\kappa$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \in (0,+\infty)$ με

$$x \cdot f'(x) = f(x)\cdot(x-1) \Leftrightarrow x\cdot f'(x) = x\cdot f(x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow x\cdot f'(x) + f(x) = x\cdot f'(x) \Leftrightarrow \left(x\cdot f(x)\right)' = x\cdot f(x)$$

Οπότε $x\cdot f(x) = c\cdot e^x,\ x>0$ με $f(1)=1$, επομένως

$1\cdot f(1) = c\cdot e \Leftrightarrow 1 = c\cdot e \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{e}$.

Άρα $x\cdot f(x) = \dfrac{1}{e}\cdot e^x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x},\ x>0$.

Δ2) α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = \dfrac{e^{x-1}\cdot x - e^{x-1}}{x^2} = \dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2},\ x>0$

- Αν $f'(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
- Αν $f'(x)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$
- Αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για $x=1$ η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με $f(1)=1$, δηλ. $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 1>0,\ x>0$.

β) $e^{f(x)} = e\cdot f(x) \Leftrightarrow \dfrac{e^{f(x)}}{e} = f(x) \Leftrightarrow e^{f(x)-1} = f(x)$

$$\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{e^{f(x)-1}}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) = f(1) \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) = 1$$

Όμως $f(x)\geq 1$ (από το Δ2 α) με το ¨=¨ να ισχύει μόνο για $x=1$, επομένως $f\left(f(x)\right)=1 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x=1$.

Δ3) α) Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και πηλίκο δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x) = \frac{\left(e^{x-1}\cdot(x-1)\right)'\cdot x^2 - e^{x-1}\cdot(x-1)\cdot\left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{\left(e^{x-1}\cdot(x-1)+e^{x-1}\right)x^2 - 2xe^{x-1}(x-1)}{x^4} =$$

$$=\frac{e^{x-1}(x-1+1)x^2-2xe^{x-1}(x-1)}{x^4}=\frac{e^{x-1}\cdot x^3-2xe^{x-1}(x-1)}{x^4}=\frac{e^{x-1}\left(x^3-2x(x-1)\right)}{x^4}=$$

$=\frac{e^{x-1}\cdot x\left(x^2-2x+2\right)}{x^4}=\frac{e^{x-1}\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}>0$ αφού $e^{x-1}, x^3>0$ και $x^2-2x+2>0$, αφού Δ< 0.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

β) Αν $x=1$, τότε $f(1)-1=0$ και $(1-1)\cdot f'(1)=0$, δηλ. ισχύει η ισότητα.

Αν $x>1$ εφαρμόζω Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο $[1,x]$:

- Η f συνεχής στο $[1,x]$
- Η f παρ/μη στο $(1,x)$

Άρα υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-1}{x-1}$.

Όμως $1<\xi<x$ και $f'\uparrow$ από Δ3) α), αφού η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Άρα $f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)-1}{x-1}<f'(x)\overset{x>1}{\Leftrightarrow}f(x)-1<(x-1)\cdot f'(x)$.

Άρα $f(x)-1\leq(x-1)\cdot f'(x)$ για κάθε $x\geq1$.

Δ4) $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(f(x)-1\right)\cdot \ell n(x-1)\right]\overset{x\neq1}{=}\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot(x-1)\cdot\ell n(x-1)\right]=0$

γιατί:

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$ και
- $\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x-1)\cdot\ell n(x-1)\right]\underset{u\to0^+}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}u\cdot\ell n u=$

  $=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\ell n u}{\frac{1}{u}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim\limits_{u\to0^+}(-u)=0$.