ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 7 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α. Η απόδειξη βρίσκεται στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 38.

Β. $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Γ. **α.** $x = x_o$ **β.** $y = y_1$

Δ. Σ—Λ—Λ—Σ—Λ

ΘΕΜΑ Β

α. $\lambda_1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$. Η εξίσωση της ευθείας ε_1 είναι: $y - 2 = 1(x-2) \Leftrightarrow \boxed{y = x}$

β. Αν λ_2 η κλίση της ευθείας ε_2 τότε $\lambda_2 = \dfrac{-4-(-3)}{2-1} = -1$ και η εξίσωσή της είναι:

$y-(-3) = -1(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -x-2}$

γ. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \cdot (-1) = -1$ άρα οι ευθείες ε_1 $\textit{και}$ ε_2 είναι κάθετες. Το σημείο τομής του είναι η λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x \\ y = -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

δ. Η εξίσωση της οριζόντιας ευθείας που διέρχεται από το σημείο (-1,-1) είναι η $y = -1$.

Η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο (-1,-1) είναι η $x = -1$.

ΘΕΜΑ Γ

α. $\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ ή } \mu - 1$

$\mathrm{B} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 + \mu - 2 = 0 \Leftrightarrow (\mu+2)(\mu-1) = 0 \Leftrightarrow \mu = -2 \text{ ή } \mu = 1$

Άρα παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in R - \{1\}$

β. Για να είναι παράλληλη στον άξονα x πρέπει να είναι της μορφής $\mathrm{B}y + \Gamma = 0$ δηλαδή πρέπει $\mathrm{A} = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ ή } \mu = 1(\alpha\pi o\rho)$.

γ. Για να είναι παράλληλη στον άξονα y πρέπει να είναι της μορφής $\mathrm{A}x + \Gamma = 0$ δηλαδή πρέπει $\mathrm{B} = 0 \Leftrightarrow \mu = -2 \;\eta\; \mu = -1(\alpha\pi o\rho)$.

δ. Για $\mu = 0$ η ευθεία που ορίζεται από την **(1)** έχει εξίσωση: $-2y + 2 = 0$.

Για $\mu = 2$ η ευθεία που ορίζεται από την **(1)** έχει εξίσωση: $2x + 4y - 2 = 0$.

Το σημείο τομής τους είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} -2y + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Για να διέρχονται από το σημείο αυτό όλες οι ευθείες που ορίζονται από την **(1),** αρκεί οι συντεταγμένες του σημείου αυτού να την επαληθεύουν, οπότε θέτουμε στην **(1)** όπου

$x=-1$ και όπου $y=1$: $\left(\mu^2-\mu\right)(-1)+\left(\mu^2+\mu-2\right)\cdot 1-2\mu+2=0 \Leftrightarrow$

$-\mu^2+\mu+\mu^2+\mu-2-2\mu+2=0 \Leftrightarrow$ 0=0 που ισχύει, άρα όλες οι ευθείες που ορίζονται από την **(1)** διέρχονται από το σημείο $(-1,1)$.

ε. Για $\mu=-1$ η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την **(1)** είναι: (η): $2x-2y+4=0$.

Η απόσταση του σημείου $\mathrm{K}(2,2)$ από την ευθεία (η) είναι: $d(\mathrm{K},n)=\dfrac{|2\cdot 2-2\cdot 2+4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

α. Έστω λ η κλίση της ευθείας. Ισχύει ότι $\lambda=-\dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|}$.

$2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma} \Leftrightarrow \left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|-\vec{\gamma}\right| \Leftrightarrow \left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left|-\vec{\gamma}\right|^2 \Leftrightarrow \left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=9 \Leftrightarrow$
$4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=9 \Leftrightarrow$

$16+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+1=9 \Leftrightarrow \boxed{\vec{\alpha}\vec{\beta}=-2}$

$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4+4+1=9$ άρα $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=3$ οπότε $\lambda=-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

β. $\vec{\alpha}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2=4$ οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι: $(\varepsilon):-2x+3y+12=0$. Θέτοντας x=0 βρίσκουμε ότι τέμνει τον άξονα y στο σημείο Β(0,-4) και θέτοντας y=0 βρίσκουμε ότι τέμνει τον άξονα x στο σημείο Α(6,0). Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ ισούται με: $E=\dfrac{\mathrm{OA}\cdot|\mathrm{OB}|}{2}=\dfrac{6\cdot 4}{2}=12$.

γ. Η απόσταση ΔΓ των ευθειών ε_1 *και* ε_2 είναι $2\sqrt{13}$, οπότε η απόσταση της ε από την ε_1 είναι ίση με $\sqrt{13}$. Αφού οι ευθείες ε_1 *και* ε_2 είναι παράλληλες στην ε, θα είναι της μορφής: $-2x+3y+\mu=0$.
Η απόσταση του σημείου Α από την ε_1 θα είναι ίση με $\sqrt{13}$, οπότε

$d(\mathrm{A},\varepsilon_1)=\dfrac{|-2\cdot 6+3\cdot 0+\mu|}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\sqrt{13} \Leftrightarrow \dfrac{|\mu-12|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \Leftrightarrow$

$|\mu-12|=13 \Leftrightarrow \mu-12=13$ *ή* $\mu-12=-13 \Leftrightarrow$
$\mu=25$ *ή* $\mu=-1$.
Άρα οι εξισώσεις των ευθειών ε_1 *και* ε_2 είναι:
$-2x+3y+25=0$ *και* $-2x+3y-1=0$.