

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι:

«Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει ότι:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ ».

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν οποιαδήποτε συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

**β)** Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$  λέγονται τα σημεία στα οποία η  $f$  παρουσιάζει ακρότατα.

**γ)** Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $[a, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[a, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**δ)** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ , αν  $a > 1$ .

**ε)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x + \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = x \cdot e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f \circ g$  και  $g \circ f$  είναι το  $(0, +\infty)$  και ότι

ισχύει  $(f \circ g)(x) = (f + g)(x)$  και  $(g \circ f)(x) = (g \cdot f)(x)$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

**Μονάδες 8**

**B2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(x) = x$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(g \circ f)(x) - x^2 \cdot e^x}{e^x}$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(x) = x^3 + \lambda^2 x^2 - (\lambda + 3)x$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Αν η  $f$  παρουσιάζει ακρότατα στο  $x_1 = -1$  και στο  $x_2 = 1$ , να δείξετε ότι  $\lambda = 0$  και να βρείτε το είδος των ακροτάτων.

**Μονάδες 7**

Για  $\lambda = 0$ :

**Γ2.** Να δείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$ , με  $\alpha < \xi < \alpha + 1$ , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη με την ευθεία  $AB$ , όπου  $A$  είναι το σημείο  $(\alpha, f(\alpha))$  και  $B$  είναι το σημείο  $(\alpha + 1, f(\alpha + 1))$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή και στη συνέχεια ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\eta\mu x) + x}{x + 2} - \frac{f(\eta\mu x) - x + 4}{x - 2} = 0 \text{ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα } (-2, 2).$$

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Σημείο  $M(x, y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$ , στην οποία η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  ελαχιστοποιείται.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

- $f'(x) > (1 - x) \cdot f''(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \cdot f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  και
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{e^{x-1} - 1} = 2$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 2$  και στη συνέχεια να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (x-1) \cdot f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , να βρείτε το πρόσημο των τιμών της και στη συνέχεια να δείξετε ότι και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

***ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

Αρείτολμο  
Δάφνη - Άγ. Δημήτριος