ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

06/12/2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 41
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 43
Α3. 1-δ 2-β 3-β 4-γ 5-γ

ΘΕΜΑ Β

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\frac{2\pi}{3}=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

β) $|\vec{u}|^2=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=1\Rightarrow|\vec{u}|=1$

$|\vec{v}|^2=|2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}|^2=\left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+2\cdot 2\vec{\alpha}\cdot 4\vec{\beta}+16\vec{\beta}^2=4+2\cdot 2\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)+16=12\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

γ) Για να βρούμε τη γωνία των δύο διανυσμάτων έχουμε, από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου: $\text{συν}(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

διότι $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=2+(-1)+(-2)+4=3$

η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι $\frac{\pi}{6}$.

ΘΕΜΑ Γ

α) $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)=\left(\kappa-1,4-\kappa\right)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(2\kappa-1,\kappa+4\right)$

β) Για να είναι τα σημεία Α,Β,Γ συνευθειακά αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι παράλληλα δηλαδή

$\begin{vmatrix}\kappa-1 & 4-\kappa\\ 2\kappa-1 & \kappa+4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\left(\kappa-1\right)\cdot\left(\kappa+4\right)-\left(4-\kappa\right)\cdot\left(2\kappa-1\right)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\kappa=0 \text{ ή } \kappa=2$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός κ τέτοιος ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι 0.

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow\left(\kappa-1\right)\cdot\left(2\kappa-1\right)+\left(4-\kappa\right)\cdot\left(\kappa+4\right)=0\Leftrightarrow 2\kappa^2-\kappa-2\kappa+1+16-\kappa^2\Leftrightarrow$
$\kappa^2-3\kappa+17=0, \quad \text{όμως} \quad \Delta<0$

Άρα δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός κ ώστε τα δύο διανύσματα να είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ Δ

α) $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4$

$(\vec{\gamma}+3\vec{\alpha}) \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\gamma}+3\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -12$

β) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4-8+9 = 5 \Rightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = \sqrt{5}$

γ) $\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} + 5\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) + 5\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} + 3\vec{\alpha} = \lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) + 5\vec{\alpha}$

όμως γνωρίζουμε ότι

$\vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}+3\vec{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\left[\lambda\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)+5\vec{\alpha}\right] = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2\right) + 5\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow -5\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = 4$

δ) για λ=4 έχουμε: $\vec{\gamma} = 6\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$. Έστω φ η γωνία των δύο διανυσμάτων οπότε

$\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\vec{\gamma}\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|} > 0$ άρα η γωνία είναι οξεία διότι:

$\vec{\gamma}\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right) = \left(6\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right) = 6\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 24-16-24+36 = 20 > 0$