Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου 8-11-2020
Ενδεικτικές απαντήσεις

<u>Θέμα Α</u>
Α1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 76
Α2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 95
Α3. Αληθής
Απόδειξη:
Έστω ότι η f δε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ, συνεπώς θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τέτοια ώστε $f\left(x_1\right) \cdot f\left(x_2\right) < 0$ και η f συνεχής στο $\left[x_1, x_2\right]$. Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, x_2\right)$: $f(\xi) = 0$ που είναι άτοπο καθότι η f δεν μηδενίζεται στο Δ.

Α4. Σ Λ Λ Σ Λ

<u>Θέμα Β</u>
Β1. $\mathrm{A} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - 2\cdot\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{2\cdot\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{2\cdot\left(4-\left(x+3\right)\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)\cdot\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{-2\cdot\left(x-1\right)} = 2$$

$$B = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Β2. Η συνάρτηση για Α=2 και Β=1 γίνεται: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1, & x \geq 0 \\ \eta\mu 4x + 1, & x < 0 \end{cases}$

Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + 4x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\left(x+2\right)}{x} = 4$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f\left(x\right) - f\left(0\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu 4x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4\eta\mu 4x}{4x} = 4.$$ Άρα $f'(0) = 4$

Β3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(x) = y \Leftrightarrow x^5 - 1 = -x \Leftrightarrow x^5 + x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1).
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^5 + x - 1$ στο διάστημα [0,1].
Η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο [0,1].
$h(0) = -1$ και $h(1) = 1$, δηλαδή $h(0)h(1) < 0$.
Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$: $h(\xi) = 0$.
Β4. **(1ος Τρόπος)** Μετά την αντικατάσταση των Α=2 και Β=1 και $f'(0) = 4$ έχουμε:
$x^6 - x^5 + x^2 - 2x + 1 = 0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^6 - x^5 + x^2 - 2x + 1$.
(Εξετάζουμε αν ισχύει το Θεώρημα Bolzano.
Η φ είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική

$\varphi(0)=1$ και $\varphi(1)=0$, δηλαδή το 1 είναι ρίζα της $\varphi(x)$, κατά συνέπεια δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα)

Οπότε παραγοντοποιώ τη $\varphi(x)$ με σχήμα Horner

1 -1 0 0 1 -2 1

____1___0___0___0___1__-1__

1 0 0 0 1 -1 // 0

Συνεπώς έχουμε $\varphi(x)=(x-1)\cdot h(x)$ όπου $h(x)=x^5+x-1$ η συνάρτηση του B3. για την οποία έχουμε δείξει ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1). Άρα και η $\varphi(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1).

(2ος Τρόπος) Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano στο διάστημα: $\left[0,\frac{4}{5}\right]\subset[0,1]$.

Η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\left[0,\frac{4}{5}\right]\subset[0,1]$.

$\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{4}{5}\right)<0$. Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\frac{4}{5}\right)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi)=0$.

Θέμα Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=\mathbb{R}$.

(1ος Τρόπος) Ο τύπος της f μπορεί να γραφεί: $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}+1<e^{x_2}+1\Rightarrow\frac{1}{e^{x_1}+1}>\frac{1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow$

$-\frac{1}{e^{x_1}+1}<-\frac{1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}+1}<1-\frac{1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

(2ος Τρόπος) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1}-\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1}=\frac{e^{x_1}\left(e^{x_2}+1\right)-e^{x_2}\left(e^{x_1}+1\right)}{\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}+1\right)}=\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}+1\right)}<0,$$

Οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Γ2. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathrm{A})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,1)$.

Διότι υπολογίζοντας τα δύο όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1.$$

Γ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Για τον υπολογισμό της f^{-1} θέτουμε

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x=ye^x+y \Leftrightarrow e^x-ye^x=y \Leftrightarrow e^x\left(1-y\right)=y.$$

Γνωρίζουμε ότι $y\in\left(0,1\right)$. Άρα μπορούμε να λύσουμε ως προς x ως εξής:

$e^x=\frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x=\ell\text{n}\frac{y}{1-y}, y\in\left(0,1\right)$. Συνεπώς $f^{-1}(x)=\ell\text{n}\frac{x}{1-x}$ με $D_{f^{-1}}=\left(0,1\right)$.

Γ4. (i) Είναι $D_g=\left(0,+\infty\right)$.

Για το πεδίο ορισμού της $f^{-1}\circ g$ έχουμε: $D_{f^{-1}\circ g}=\left\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_{f^{-1}}\right\}=\left(1,e\right)$.

Διότι: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<1-\ell\text{n}\,x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -1<-\ell\text{n}\,x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1>\ell\text{n}\,x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ \ell\text{n}1<\ell\text{n}\,x<\ell\text{n}\,e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1<x<e \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<e.$

Για τον τύπο της $f^{-1}\circ g$ έχουμε: $\left(f^{-1}\circ g\right)\left(x\right)=f^{-1}\left(g\left(x\right)\right)=\ell\text{n}\frac{1-\ell\text{n}\,x}{\ell\text{n}\,x}$

Εξετάζουμε την μονοτονία:

Έστω $x_1,x_2\in\left(1,e\right)\ \mu\varepsilon\ x_1<x_2 \Rightarrow$

$\ell\text{n}\,x_1<\ell\text{n}\,x_2 \Rightarrow -\ell\text{n}\,x_1>-\ell\text{n}\,x_2 \Rightarrow 1-\ell\text{n}\,x_1>1-\ell\text{n}\,x_2 \ (1)$

$\ell\text{n}\,x_1<\ell\text{n}\,x_2 \Rightarrow \frac{1}{\ell\text{n}\,x_1}>\frac{1}{\ell\text{n}\,x_2} \ (2)$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε έχουμε:

$\frac{1-\ell\text{n}\,x_1}{\ell\text{n}\,x_1}>\frac{1-\ell\text{n}\,x_2}{\ell\text{n}\,x_2} \Rightarrow \ell\text{n}\left(\frac{1-\ell\text{n}\,x_1}{\ell\text{n}\,x_1}\right)>\ell\text{n}\left(\frac{1-\ell\text{n}\,x_2}{\ell\text{n}\,x_2}\right) \Rightarrow \left(f^{-1}\circ g\right)\left(x_1\right)>\left(f^{-1}\circ g\right)\left(x_2\right)$

Άρα η $f^{-1}\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,e).

(ii) Μετασχηματίζουμε την ανισότητα και έχουμε:

$\frac{1-\ell\text{n}\,\alpha}{1-\ell\text{n}\left(\alpha+1\right)}>\frac{\ell\text{n}\,\alpha}{\ell\text{n}\left(\alpha+1\right)} \Leftrightarrow \frac{1-\ell\text{n}\,\alpha}{\ell\text{n}\,\alpha}>\frac{1-\ell\text{n}\left(\alpha+1\right)}{\ell\left(\alpha+1\right)} \Leftrightarrow \ell\text{n}\left(\frac{1-\ell\text{n}\,\alpha}{\ell\text{n}\,\alpha}\right)>\ell\text{n}\left(\frac{1-\ell\text{n}\left(\alpha+1\right)}{\ell\text{n}\left(\alpha+1\right)}\right) \Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\circ g\right)\left(\alpha\right)>\left(f^{-1}\circ g\right)\left(\alpha+1\right) \overset{f^{-1}\circ g\searrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\alpha+1$

Που ισχύει.

__**Θέμα Δ**__

Δ1. Έστω ρ ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$, τότε

$g(\rho)=0 \Leftrightarrow g^2(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^2\cdot f^2(\rho)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\rho-2\sigma\upsilon\nu\rho+1=0 \Leftrightarrow$

$(\sigma\upsilon\nu\rho-1)^2=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\rho=1 \overset{\rho\in[-\pi,\pi]}{\Leftrightarrow} \rho=0$. Οπότε το 0 είναι μοναδική ρίζα της $g(x)=0$ στο $[-\pi,\pi]$.

Επομένως η g είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $[-\pi,0)$ και $(0,\pi]$. Άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $[-\pi,0)$ και στο $(0,\pi]$.

Δ2. $g(-\pi) = -\pi \cdot f(-\pi) = -\pi \cdot \frac{2}{\pi} = -2 < 0$ οπότε για κάθε $x \in [-\pi, 0)$ έχουμε

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) < 0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} f(x) > 0$.

$g(\pi) = \pi \cdot f(\pi) = \pi \cdot \left(-\frac{2}{\pi}\right) = -2 < 0$ οπότε για κάθε $x \in (0, \pi]$ έχουμε

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) < 0$.

Για κάθε $x \in [-\pi, 0)$:

$$x^2 \cdot f^2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right)^2 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}.$$

Για κάθε $x \in (0, \pi]$:

$$x^2 \cdot f^2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right)^2 \overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}.$$

Επίσης η f είναι συνεχής στο 0, οπότε $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Δ3. $3\sigma\upsilon\nu x_0 - x_0 = 3 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu x_0 - 3 = x_0 \overset{x_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\sigma\upsilon\nu x_0 - 1}{x_0} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{1}{3}$

Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ και $f(-\pi) = \frac{2}{\pi} \neq f(0) = 0$.

Επίσης $f(0) < \frac{1}{3} < f(-\pi)$.

Από Θ.ε.τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{1}{3}$.

Δ4. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-\pi, 0)$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Για κάθε $x \in [-\pi, 0)$: $-1 \le \eta\mu \frac{1}{f(x)} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} - 1 \le \frac{1}{f(x)} + \eta\mu \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{f(x)} + 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{f(x)} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{f(x)} + 1\right) = +\infty$.

Επομένως, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{f(x)} + \eta\mu \frac{1}{f(x)}\right) = +\infty$.