Άλγεβρα Α΄ Λυκείου 8-11-2020
Ενδεικτικές απαντήσεις

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 62
β) Σχολικό βιβλίο σελ. 63

Β. α) $(a-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

β) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

γ) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Γ. α) Σ **γ)** Λ **ε)** Λ
β) Σ **δ)** Λ **στ)** Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10\}$

$\mathrm{B}\{1,2,3,6\}$

α) $x^2=25\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{25}\Leftrightarrow x=\pm5$

Επειδή $x\in\mathbb{N}$, η δεκτή λύση της εξίσωσης είναι $x=5$ $(-5\in\mathbb{Z})$.

Έτσι $\Gamma=\{5\}$.

β) $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{1,2,3,4,6,8,10\}$

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{2,6\}$

$\mathrm{B}'=\{4,5,7,8,9,10\}$

γ) Ισχύει, αφού το στοιχείο του Γ είναι και στοιχείο του B'.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Α. α) Έστω ότι ισχύει: $x^4+y^4\geq 2x^2y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2y^2+y^4\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2\geq 0$, που όντως ισχύει λόγω τετραγώνου.

β) Έστω ότι ισχύει: $x(x+1)^2<-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2+2x+1)+2<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2+x+2<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x+2)+(x+2)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+1)<0$, που όντως ισχύει αφού

- $x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+1\geq 0+1\Leftrightarrow x^2+1\geq 1>0\Leftrightarrow x^2+1>0$
- $x<-2\Leftrightarrow x+2<0$

γ)
- $x\geq 0\Leftrightarrow 1+x>0$
- $y\geq 0\Leftrightarrow 1+y>0$ ΕΚΠ: $(1+x)\cdot(1+y)\neq 0$

Έστω ότι ισχύει: $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y} \Leftrightarrow \cancel{(1+x)}(1+y)\cdot\frac{x}{\cancel{(1+x)}}<(1+x)\cancel{(1+y)}\frac{y}{\cancel{1+y}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+y)x<(1+x)\cdot y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\cancel{xy}-y-\cancel{xy}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y<0$, που όντως ισχύει από υπόθεση ($x<y \Leftrightarrow x-y<0$).

Β. • Έστω ότι ισχύει $x^2+y^2+10\geq 6x+2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-2y+10\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2\geq 0$

που όντως ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

• $x^2+y^2+10=6x+2y \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-2y+10=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-3=0$ και $y-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3$ και $y=1$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Α. $|x^2-2x+1|-|-x^2-1|+2x = |(x-1)^2|-|x^2+1|+2x \overset{(*)}{=}$

$=(x-1)^2-(x^2+1)+2x=x^2-2x+1-x^2-1+2x=0$

(*) • $(x-1)^2\geq 0$, λόγω τετραγώνου

• $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+1>0$

Β. α) $d(x,2)\leq 1 \Leftrightarrow |x-2|\leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1\leq x-2\leq 1 \Leftrightarrow -1+2\leq x\leq 1+2$

$\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$ άρα $x\in[1,3]$

β) i) $\mathrm{A}=|x-3|-2|y+2|+4|-x|=$

$=|x-3|-2|y+2|+4|x| =$

$= (-x+3)-2(y+2)+4\cdot x=$

$=-x+3-2y-4+4x=3x-2y-1$

• $x\leq 3 \Leftrightarrow x-3\leq 0$
• $y\in[-2,2] \Leftrightarrow -2\leq y\leq 2 \Rightarrow$ $y\geq -2 \Leftrightarrow y+2\geq 0$
• $1\leq x\leq 3 \Leftrightarrow x>0$

ii) • $1\leq x\leq 3 \overset{(\cdot 3)}{\Leftrightarrow} 3\leq 3x\leq 9$ **(1)**

• $-2\leq y\leq 2 \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 4\geq -2y\geq -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\leq -2y\leq 4$ **(2)**

προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$-1\leq 3x-2y\leq 13 \Leftrightarrow -2\leq 3x-2y-1\leq 12 \Leftrightarrow -2\leq \mathrm{A}\leq 12$

Ελάχιστη τιμή της Α: -2.

Μέγιστη τιμή της Α: 12.