ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 304

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 246

Α3. Λ - Λ - Σ - Σ - Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w=\dfrac{iz}{z+i} \Leftrightarrow wz+wi=iz \Leftrightarrow (w-z)i=-wz \Leftrightarrow w-z=wzi$

Ισχύει $wz\in\mathbb{R}$ οπότε wzi φανταστικός. Επομένως

$\operatorname{Re}(w-z)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(w)=\operatorname{Re}(z)$.

Β2. $w-z=wzi=\dfrac{iz}{z+i}zi=-\dfrac{z^2}{z+i}=-\dfrac{(x+yi)^2}{x+yi+i}=\ldots=$

$-\dfrac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}-\dfrac{x^2y-x^2+y^3+y^2}{x^2+(y+1)^2}i$

Β3. $\operatorname{Re}(w-z)=0 \Leftrightarrow x^3+xy^2+2xy=0 \Leftrightarrow x(x^2+y^2+2y)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$x^2+y^2+2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=1$

Αλλά $x\neq 0$. Για $x=0$ έχουμε $y=0$ ή $y=-2$.

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1$, εκτός από τα σημεία $(0,0)$ και $(0,-2)$.

Β4. Αν Α είναι η εικόνα του w και Β η εικόνα του z, αρκεί να δείξουμε ότι:

$(OA)=(OB) \Leftrightarrow |w|=|z|$ και

$w\neq -z$ (γιατί αν $w=-z$ τότε τα σημεία Ο, Α, Β θα είναι συνευθειακά).

$|w|=\left|\dfrac{iz}{z+i}\right|=\dfrac{|i||z|}{|z+i|}=|z|$, γιατί απ' το Β3. έχουμε $|z+i|=1$.

Έστω $w=-z$ τότε $w=\dfrac{iz}{z+i} \Leftrightarrow -z=\dfrac{iz}{z+i} \Leftrightarrow \ldots z=0$ ή $z=-2i$ ΑΤΟΠΟ αφού $z=x+yi$, με $x\neq 0$. Άρα $w\neq -z$.

Β5. $|z+i|=1 \Leftrightarrow |\overline{z+i}|=1 \Leftrightarrow |\overline{z}-i|=1$. Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του $\overline{z}$ είναι ο κύκλος με κέντρο $\Lambda(0,1)$ και ακτίνα $R=1$, εκτός από τα σημεία $(0,0)$ και $(0,2)$.

Επίσης $|w-i|=\left|\dfrac{iz}{z+i}-i\right|=\left|\dfrac{iz-iz+1}{z+i}\right|=\dfrac{1}{|z+i|}=1$. Άρα ο γ.τ. των εικόνων και του w είναι ο κύκλος με κέντρο $\Lambda(0,1)$ και ακτίνα $R=1$, εκτός από τα σημεία $(0,0)$ και $(0,2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $2t(f(t)-2015)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x)=2x\left(f(x)-2015\right) \Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=-2015\cdot 2x \overset{(\cdot e^{-x^2})}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)\cdot e^{-x^2}+f(x)\cdot\left(e^{-x^2}\right)'=(2015\cdot e^{-x^2})' \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot e^{-x^2}\right)'=(2015e^{-x^2})'$$

επομένως υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε: $f(x)\cdot e^{-x^2}=2015e^{-x^2}+c \Leftrightarrow$

$f(x)=2015+c\cdot e^{x^2}$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=0$, οπότε $c=-2015$.

Άρα $f(x)=2015\left(1-e^{x^2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=-4030xe^{x^2}$ με $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘

Μέγιστο $f(0)=0$

Επομένως ισχύει ότι $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. $\int_0^x f(t)dt \leq 2015x^2 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt-2015x^2\leq 0$ (1).

Θέτουμε $g(x)=\int_0^x f(t)dt-2015x^2$, $x\geq 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως και συνεχής, με $g'(x)=f(x)-4030x$.

Απ' το Γ2. έχουμε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και προφανώς $-4030x<0$.

Άρα $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=0$ και ισχύει
$g(x)\le g(0)=0,\ x\ge 0$.

Γ4. Η συνάρτηση $t\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών ,οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $h'(x)=\dfrac{xf(x)}{2015}=x\left(1-e^{x^2}\right)$ και $h'(1)=1-e$.

$$h(1)=\frac{1}{2015}\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t\left(1-e^{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left(2t-2te^{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left[t^2-e^{t^2}\right]_0^1=$$

$=1-\dfrac{e}{2}$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι:

$$y-h(1)=h'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\left(1-\frac{e}{2}\right)=(1-e)(x-1)\Leftrightarrow y=(1-e)x+\frac{e}{2}.$$

Γ5. $h(x)-\dfrac{e}{2}\le(1-e)x\Leftrightarrow h(x)\le(1-e)x+\dfrac{e}{2}$.

$h'(x)=x\left(1-e^{x^2}\right)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$h''(x)=1-e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$ επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $h'''(x)=-2xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)$.

Για $x>0$ προφανώς είναι $h'''(x)<0$, επομένως η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επίσης $h''(0)=0$, οπότε για $x>0$ έχουμε ότι $h''(x)<h''(0)=0$

Άρα η h είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Οπότε η γραφική παράσταση της h θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη, δηλαδή:

$h(x)\le(1-e)x+\dfrac{e}{2}$, για κάθε $x\ge 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $u=x-t$, οπότε $du=-dt$.

Για $t=0: u=x$ και για $t=x: u=0$, οπότε

$\displaystyle\int_0^x f(x-t)dt=-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(u)du$. Επομένως

$$f(x)-2x=\int_0^x f(x-t)dt\Leftrightarrow f(x)=\int_0^x f(u)du+2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\displaystyle\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, με

$$f'(x)=f(x)+2\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=2\cdot e^{-x}\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x}\right)'=\left(-2\cdot e^{-x}\right)'\Leftrightarrow f(x)e^{-x}=-2\cdot e^{-x}+c.$$

$f\left(0\right)=\int_0^0 f(u)du+2\cdot 0=0$, οπότε $c=2$. Επομένως

$f(x)e^{-x}=-2\cdot e^{-x}+2 \Leftrightarrow f(x)=2e^{x}-2$.

Δ2. Θέτουμε $u=x+t$, οπότε $du=dt$.

Για $t=0: u=x$ και για $t=1: u=x+1$, οπότε $\int_0^1 g(x+t)dt=\int_x^{x+1} g(u)du$.

Η δοσμένη ανισότητα γράφεται:

$x\int_x^{x+1} g(u)du \geq f(x) \Leftrightarrow x\int_x^{x+1} g(u)du - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $K(x)=x\int_x^{x+1} g(u)du - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $K(0)=0$, οπότε $K(x) \geq K(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η K παρουσιάζει ολ. ελάχιστο στο $x_0=0$.

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $K'(x)=\int_x^{x+1} g(u)du + x\left(g(x+1)-g(x)\right)-f'(x)$.

Από το θ. Fermat έχουμε: $K'(0)=0 \Leftrightarrow \int_0^1 g(u)du=2$.

Δ3. Θέτουμε $\phi(x)=\int_0^x g(t)dt-1+f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $\phi(0)\cdot\phi(1)=...=1-2e<0$.

Από θ. Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$\phi(x_0)=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt=1-f(x_0)$.

Δ4. Θέτουμε $L(x)=x\cdot\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η L είναι συνεχής στο $[0,x_0]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,x_0)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $L'(x)=\phi(x)+x\phi'(x)$.

Επίσης $L(0)=0$ και $L(x_0)=x_0\cdot\phi(x_0)=0$.

Από θ. Rolle υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (0,x_0) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε

$L'(\xi)=0 \Leftrightarrow \phi(\xi)+\xi\phi'(\xi)=0$.

Δ5. Θέτουμε $G(x)=\int_0^{f(x)} g(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $G'(x)=g\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$.

Από θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\eta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$G'(\eta)=\frac{G(1)-G(0)}{1-0} \Leftrightarrow g\left(f(\eta)\right)\cdot f'(\eta)=\int_0^{2e-2} g(t)dt \Leftrightarrow ...$$

$$g\left(f(\eta)\right)\cdot e^{\eta}=\int_0^{e-1} g(2t)dt.$$