ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 10)

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σ' ένα διάστημα Δ;

(Μονάδες 3)

Α3. Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $az^2+\beta z+\gamma=0$, με $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $a\neq 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών;

(Μονάδες 2)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, σημειώνοντας στο γραπτό σας τη λέξη **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.
3. Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.
4. Αν f συνεχής συνάρτηση, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.
5. $\int_1^e \ln x dx=\int_e^1 \ln\left(\dfrac{1}{t}\right)dt$.

(Μονάδες 10)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει: $w = \frac{z-5i}{z+i}$, με $z \neq -i$.

Β1. i) Αν $z = 6+5i$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (2w)^{22} + (2\overline{w})^{18}$.

ii) Αν ισχύει $|w| < 1$, να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Im}(z) > 2$.

(Μονάδες 8)

Β2. Αν ο w είναι φανταστικός αριθμός, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 5)

Β3. i) Να αποδείξετε ότι: $1 < |z| \leq 5$.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της εικόνας του $\frac{1}{z}$ από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 7)

Β4. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 είναι σημεία του παραπάνω κύκλου να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 36 + 2 \cdot \operatorname{Re}(\overline{z_1} \cdot z_2)$.

(Μονάδες 5)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

Γ1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f και δείξτε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} - 1 = 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 7)

Γ2. Μελετήστε τη μονοτονία της f και βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

Γ3. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής και βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο καμπής της.

(Μονάδες 6)

Γ4. Αν $(\varepsilon): y = x$, είναι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής της, βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την (ε), τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

(Μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

- $\left| f'(x)-f'(y)+\ell n\dfrac{y}{x} \right| \le (x-y)^4$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ και
- η γραφική της παράσταση δέχεται κοινή εφαπτομένη με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ell nx$ στο $x_0=1$.

Δ1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x)=f'(x)-\ell nx$, $x\in(0,+\infty)$ είναι σταθερή.

(Μονάδες 6)

Δ2. Δείξτε ότι $f(x)=x\ell nx$, $x\in(0,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Δ3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_1^{-f\left(\frac{1}{x}\right)} e^{\frac{1}{t}}dt-x^2+6x-8$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[2,4]$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Δείξτε ότι υπάρχει <u>$\xi\in(2,3)$</u> τέτοιο ώστε $e^{\frac{\xi}{\ell n\xi}}\left(1-\ell n\xi\right)=2\xi^3-6\xi^2$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Αν $G(x)=\int_1^{f(x)} \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{f^2(x)}dt$, $x>1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.

(Μονάδες 5)

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:</u>

ΒΑΓΕΝΑΣ ΘΟΔΩΡΗΣ – ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ ΣΤΑΘΗΣ
ΚΑΡΑΪΣΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΚΛΑΥΔΙΑΝΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ ΓΙΟΥΛΗ – ΜΑΚΡΗ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΠΑΝΤΕΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ